08.05.2014

Aufgabe 2.3.1 $\alpha := 5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} \approx 1{,}96$

30,1C $\quad k=65$

Anteil p von Klapfern $\Rightarrow (n + z_{\alpha/2}^2)\, p^2 - (2k + z_{\alpha/2}^2)\, p + \frac{k^2}{n} = 0 \Rightarrow p_1 \approx 45\%,\ p_2 \approx 63\%$

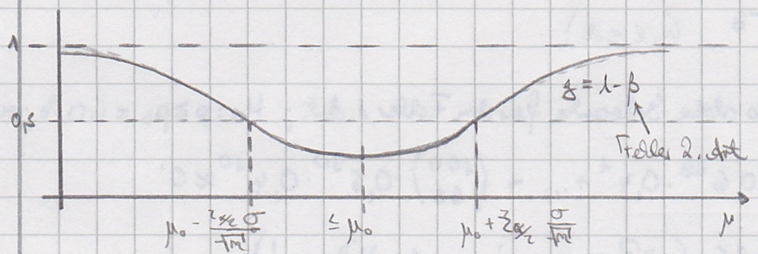
Aufgabe 2.3.2 zu schätzen: Intensität; λ von gewissen Ereignissen pro Monat; Beobachtungswert $\hat{\lambda} := \frac{103}{\underset{:=n}{24}}$ (pro Monat)

Konfidenzintervall: $\alpha = 5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} \approx 1{,}96 \Rightarrow \lambda^2 - \left(2\hat{\lambda} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)\lambda + \hat{\lambda}^2 = 0 = \lambda^2\left(-2\,\frac{103}{24} + \frac{1{,}96^2}{24}\right)\lambda + \left(\frac{103}{24}\right)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 \approx 3{,}5\ ;\ \lambda_2 \approx 5{,}1$

Eigenschaften der Gütefunktion g des zweiseitigen Gaußtests: • g (beliebig oft) differenzierbar

- Minimumstelle und senkrechte Symmetrieachse bei $\mu = \mu_0$
- $g(\mu_0) = \alpha;\quad g\left(\mu_0 \pm z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}5$
- Wendepunkte außerhalb von $\left[\mu_0 \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$



Einseitiger Gaußtest $H_0: \mu \geq \mu_0$ (bzw. $H_0: \mu \leq \mu_0$)

$z_\alpha \to$ einseitiger Gaußtest

Kritischer Bereich für die standardisierte Testgröße $\boxed{(\bar{x} - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}$: $]-\infty, -z_\alpha[$ (bzw. $]z_\alpha, \infty[$)

Gütefunktion $\boxed{g(\mu) := 1 - \Phi(z_\alpha + d(\mu))}$ für $\mu < \mu_0$ (bzw. $1 - \Phi(z_\alpha - d(\mu))$ für $\mu > \mu_0$) sonst konstant α

$\boxed{d(\mu) := \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n}}$ wie beim zweiseitigen Gaußtest

letztes Zahlenbeispiel: $H_0: \mu \geq \mu_0 := 50$; bei einem Umfang von $n := 30$ $(\sigma := 6)$ — kritischer Bereich $=: K$

Mit $\alpha := 5\%$ ergibt sich der Ablehnungsbereich (wegen $z_\alpha \approx 1{,}64$) $]-\infty, -1{,}64[$ für

$(\bar{x} - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = (47{,}9 - 50)\cdot\frac{\sqrt{30}}{6} \approx -1{,}92 \in K$

Testergebnis: H_0 wird abgelehnt (mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\leq 5\%$)

Für $\mu := 47{,}5$ (fiktiv) ergibt sich die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art $\beta(\mu) = 1 - g(\mu) = \Phi(z_\alpha + d(\mu))$

$= \Phi\left(1{,}64 + (47{,}5 - 50)\cdot\frac{\sqrt{30}}{6}\right) \approx \Phi(-0{,}64) \approx 26\%$

Also bei diesem Stichprobenumfang würden wir mit 26% Wahrscheinlichkeit irrtümlich H_0 annehmen, wenn der wahre Wert $\mu = 47{,}5$ wäre

Interessante Fragestellung: Wie groß muss der Stichprobenumfang gewählt werden, dass bei einem tatsächlichen Mittelwert von $\mu := 45$ zu höchstens 10% irrtümlich akzeptiert wird?

Antwort (mittels Umformung der Bedingung $\beta(\mu) \leq \overset{\beta_{max}}{10\%}$ nach n): $\boxed{n \geq \left(\frac{(z_\alpha + z_{\beta max})\,\sigma}{\mu - \mu_0}\right)^2}$

Bsp.: $n \geq \left(\frac{(1{,}64 + 1{,}28)\cdot 6}{45 - 50}\right)^2 \approx 12{,}3 \Rightarrow \underline{n \geq 13}$

für $\mu = 47{,}5 \Rightarrow \underline{n \geq 50}$ Stichprobenumfang

Prüfung = Gaußtest

Eine entsprechende Formel gilt für den zweiseitigen Gaußtest: mit $z_{\alpha/2}$ anstelle von z_α

$$\boxed{n \geq \left(\frac{(z_{\alpha/2} + z_{\beta max})\sigma}{\mu - \mu_0} \right)^2}$$

mit Ablehnungskriterium: $\boxed{\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > z_{\alpha/2}}$

für 2 seitigen Gaußtest

Analog für den t-Test (bei unbekanntem σ): $\boxed{|\dots| > t_{n-1, \alpha/2}}$

<u>Der Binomialtest</u> ebenfalls ein- und zweiseitig

$H_0: p \geq p_0$ (bzw. $p \leq p_0$) und $H_0\, p = p_0$

Testgröße: $x_1 + \dots + x_n$ („Trefferzahl") mit $x_i \in \{0, 1\}$

Kritischer Bereich für $H_0: p \geq p_0$: $K := \{0, 1, \dots, k\}$ für $k \in \mathbb{N}_0 \mid g_{n,k+1}(p_0) \geq 1 - \frac{\alpha_{max}}{2}\}$ mit
bestimmt durch

$$g_{n,l}(p) := \sum_{j=l}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \qquad (n, l \in \mathbb{N}_0)$$

<u>Zahlenbeispiel</u>: $\alpha_{max} := 13\%$ als obere Schranke für den Fehler 1. Art; $H_0: p \geq p_0 = 60\%$; $n := 100$

$$\binom{100}{100} \cdot 0{,}6^{100} \cdot 0{,}4^0 + \binom{100}{99} 0{,}6^{99} \cdot 0{,}4^1 + \dots + \binom{100}{90} \cdot 0{,}6^{90} \cdot 0{,}4^{10} \approx 0$$

Bedingung $\Sigma \dots \geq 1 - \frac{13\%}{2} = 0{,}935$ (-> Programmierung oder Näherung!)